

Tiempo disponible: 1 h 30 min

Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica. Los errores ortográficos, el desorden, la falta de limpieza en la presentación y la mala redacción, podrán suponer una disminución hasta de un punto en la calificación, salvo casos extremos.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARA A ESTE EJERCICIO : (véanse las distintas partes del examen)

Instrucciones: Se proponen dos opciones **A** y **B**. Hay que elegir una de las opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras; pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán de estar debidamente justificados

OPCIÓN A

A.1.- (2'5 puntos) Sean **A** y **B** las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es

fácil comprobar que ambas tiene el máximo rango, que es 3. Pero ¿qué ocurre si los combinamos linealmente?. En concreto, estudia el rango de la matriz $A + \lambda B$ según los valores del parámetro λ

A.2.- Sea **H** la hipérbola de ecuación $xy = 4$. Sea **C**₁ y **C**₂ dos circunferencias, ambas con centro el origen de coordenadas y tales que

- I) **C**₁ es tangente a la hipérbola
- II) **C**₂ corta a la hipérbola **H** en un punto con abcisa 1

- a) (1 punto) Representar gráficamente las tres cónicas anteriores
- b) (1'5 puntos) Calcula el área de la corona circular encerrada entre las dos circunferencias

A.3.- Sea la función $f(x) = x \cos x$

- a) (1 punto) ¿Tiene límite en $+\infty$? (justifica tu respuesta)
- b) (1'5 puntos) Calcula la integral de **f** entre **x = 0** y el primer cero positivo que tiene la función

Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula

A.4.- (2'5 puntos) En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula, razonadamente, la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.

OPCIÓN B

B.1. Discute el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$$

a)(1'5 puntos) Clasifícalo según el valor del parámetro **a**

b)(1 punto) Halla, si existe, la solución cuando **a = 0**

B.2.a) (1 punto) Hallar, razonadamente, la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos **(2, 0)** y **(0, 1)**

b) (1'5 puntos) Entre todas estas circunferencias halla la ecuación de aquella o aquellas cuyo centro equidista de los ejes coordenados

B.3.- Sea la función **f** definida para todo número real **x** en la forma

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ \text{sen } \beta x + \cos \beta x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1'3 puntos) Determinar el valor de **β** para que **f** sea derivable en **x = 0**

b) (1'2 puntos) Calcular la integral de **f** sobre el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

B.4.- Sea la función $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x-1}$

a) (0'5 puntos) Determinar su dominio, es decir, el conjunto de puntos donde está definida

b) (2 puntos) Estudiar sus máximos y mínimos (si los tiene) en el intervalo **(-1, 1)**, precisando si son absolutos o relativos respecto al intervalo indicado